

# 基于小波变换与数学形态学的图像边缘检测方法

李颖莹, 魏连鑫

(上海理工大学理学院数学系, 上海 200093)

**摘要:** 为得到更加连续完整的边缘图像, 提出一种基于B样条小波变换与数学形态学的图像边缘检测方法, 在此方法中给出有效重构算法。针对自然图像, 利用B样条小波变换作用于图像的高频子图像得到高频边缘图; 利用数学形态学检测图像的低频子图像得到图像的低频边缘图; 利用文中给出的有效重构的方法将高频边缘图和低频边缘图重构得到最终的边缘图像。实验结果表明, 新方法提取出的边缘效果较之前更佳。

**关键词:** 小波变换; B样条小波; 数学形态学; 边缘检测; 有效重构

**中图分类号:** TP391.1 **文献标识码:** A

## An Image Edge Detection Method Based on Wavelet Transform and Mathematical Morphology

LI Yingying, WEI Lianxin

(School of Science, University of Shanghai for Science and Technology Mathematics Department, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** To obtain more continuous and complete edge images, the paper proposes an image edge detection method based on B-spline wavelet transform and mathematical morphology, and an effective reconstruction algorithm is given in this method. For natural images, B-spline wavelet transform is applied to the high-frequency sub-images to get high-frequency edge images; mathematical morphology is used to detect the low-frequency sub-images of the images to get the low-frequency edge images; and the high-frequency edge images and low-frequency edge images are reconstructed to get the final edge images by the effective reconstruction method given in this paper. Experimental results show that the edge effect obtained by the new method is better than the previous one.

**Keywords:** wavelet transform; B-spline wavelet; mathematical morphology; edge detection; effective reconstruction

## 1 引言(Introduction)

图像信号的突变点、不规则结构和不平衡现象处会产生图像的边缘。图像边缘是一种重要的视觉信息, 为人们描述或识别目标及解释图像提供了一个重要的特征参数。许多学者对边缘检测做出研究。Canny在1986年提出的边缘检测的计算, Mallat提出的信号处理的小波变换原理<sup>[1-3]</sup>等研究为边缘检测的发展做出了重大贡献。

刘晓豫提出的小波变换的方法进行图像边缘检测<sup>[4]</sup>, 虽然在对图像边缘的定位和抑噪性能方面表现较好, 但只是从图像分解的高频分量中获取边缘, 忽略了低频信息, 检测出的边缘并不完整。陈虎采用数学形态学方法进行图像边缘检测<sup>[5]</sup>, 提出将多种结构元素作用于图像, 解决了单一结构元素进行边缘检测时的缺点, 但对于结构元素不同方向的边缘会被平滑掉。因此, 为实现更好的边缘检测效果, 应该兼顾图像的

高频分量和低频分量。王海虹在文献中提出一种小波变换<sup>[6]</sup>和数学形态学结合的边缘检测算法<sup>[7,8]</sup>, 但对于自然含噪的图像, 检测结果依然含有因噪声产生的伪边缘。基于这一点, 本文在文献[6]的基础上提出一种有效重构的方法。本文首先对图像进行小波分解, 结合B样条小波和数学形态学方法分别获得高频边缘和低频边缘。将低频边缘重构得到低频结果图, 将低频与高频边缘重构得到边缘结果图, 利用低频结果图对边缘结果图进行过滤操作得到边缘图像。结果表明, 此方法更加有效地提取了图像的边缘。

## 2 基于小波变换与数学形态学结合的图像边缘检测算法(Image edge detection algorithm based on wavelet transform and mathematical morphology)

### 2.1 小波对图像的分解与重构

利用小波变换的原理对图像进行分解与重构。设信号 $f$

在空间 $V_j$ 中有逼近。 $f$ 可由两个基本正交基 $\psi_{j,k}, \phi_{j,k}$ 表示, 其中

$$\begin{cases} \psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \\ \phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \end{cases}, k \in Z$$

为方便运算, 此处使用正交基的另一种形式来表示, 如式(1.1):

$$\left\{ \phi(2^j x - k) \right\}_{k \in Z}, \left\{ \psi(2^j x - k) \right\}_{k \in Z} \quad (1.1)$$

则

$$f = \sum_{k \in Z} 2^{j/2} \langle f, \phi_{j,k} \rangle 2^{-j/2} \phi_{j,k} = \sum_{k \in Z} a_k^j \phi(2^j x - k) \quad (1.2)$$

由于正交直和分解 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ , 所以:

$$f = \sum_{k \in Z} a_k^{j-1} \phi(2^{j-1} x - k) + \sum_{k \in Z} b_k^{j-1} \psi(2^{j-1} x - k) \quad (1.3)$$

其中

$$a_k^{j-1} = 2^{(j-1)/2} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle, b_k^{j-1} = 2^{(j-1)/2} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \quad (1.4)$$

又由于

$$\begin{cases} \phi_{j-1,l} = 2^{-1/2} \sum_k p_{k-2l} \phi_{j,k} \\ \psi_{j-1,l} = 2^{-1/2} \sum_k p_{k-2l} \psi_{j,k} \end{cases}, l \in Z \quad (1.5)$$

其中

$$\begin{aligned} p_k &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} dx \\ p_{k-2l} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - 2k - 4l)} dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

则由上式可得分解公式为:

$$\begin{cases} a_k^{j-1} = 2^{-1} \sum_{k \in Z} p_{k-2l} a_k^j \\ b_k^{j-1} = 2^{-1} \sum_{k \in Z} (-1)^k p_{1-k+2l} a_k^j \end{cases} \quad (1.7)$$

对于二维情况下, 设图像为 $f(X)$ 。

其中, 令 $X = (x, y)$ ,  $K = (k_1, k_2)$ ,  $K \in Z^2$

则小波的两尺度关系函数为:

$$\phi(X) = \sum_{K \in Z^2} p_K \phi(2X - K), p_K = p_{k_1} p_{k_2} \quad (1.8)$$

水平、垂直、对角线小波函数依次为<sup>[1]</sup>:

$$\psi^1(X) = \phi(x)\psi(y), \psi^2(X) = \phi(y)\psi(x), \psi^3(X) = \psi(x)\psi(y) \quad (1.9)$$

即:

$$\psi^\lambda(X) = \sum_K q_k^\lambda \phi(2X - K) \quad (1.10)$$

$$q_k^\lambda = \begin{cases} p_{k_1} q_{k_2}, \lambda = 1 \\ q_{k_1} p_{k_2}, \lambda = 2, q_k = (-1)^k \overline{p_{1-k}} \\ q_{k_1} q_{k_2}, \lambda = 3 \end{cases} \quad (1.11)$$

由基产生空间的方式如下, 对图像 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $f_j \in V_j$ 是 $f$ 在 $V_j$ 上的投影,  $\omega_j^\lambda \in W_j^\lambda$ 是 $f$ 在 $W_j^\lambda$ 上的投影则由基的正交性得:

$$f_j = \sum_{k \in Z^2} \langle f, \phi_{j,k} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \phi_{j,k}, \omega_j^\lambda = \sum_{k \in Z^2} \langle f, \psi_{j,k}^\lambda \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \psi_{j,k}^\lambda \quad (1.12)$$

则容易得到:

$$f_j(X) = \sum_{k \in Z^2} a_k^j \phi(2^j X - K), \omega_j^\lambda(X) = \sum_{k \in Z^2} b_k^j \psi^\lambda(2^j X - K) \quad (1.13)$$

其中

$$\begin{cases} a_k^j = 2^{2j} \langle f, \phi(2^j X - K) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ b_k^j = 2^{2j} \langle f, \psi^\lambda(2^j X - K) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{cases} \quad (1.14)$$

由于

$$f_j = f_{j-1} + \sum_{\lambda=1}^3 \omega_{j-1}^\lambda \quad (1.15)$$

其中,  $f_j$ 可由 $V_j$ 上的基 $\{\phi_{j,k}\}_{k \in Z^2}$ 表示,  $f_j, \omega_j^\lambda$ 可由 $\{\phi_{j,k}\}_{k \in Z^2} \cup \{\psi_{j,k}^\lambda\}_{k \in Z^2}$ 这个共同基底表示。

由此可得到小波分解算法为:

$$\begin{cases} a_l^{j-1} = \frac{1}{4} \sum_{k \in Z^2} p_{k-2l} a_k^j \\ b_l^{j-1, \lambda} = \frac{1}{4} \sum_{k \in Z^2} q_{k-2l}^\lambda a_k^j, \lambda = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (1.16)$$

每经过一次分解, 图像就被分解为四个部分, 详见表1。

表1 小波分解子图

Tab.1 Wavelet decomposition subgraph

序号	二维小波分解区域
1	LL
2	LH
3	HL
4	HH

其中, LL区域为原图像的低频部分即为 $f_j$ , 保留原图像的大部分信息。HL区域即为 $\omega_j^3$ 保留原图像的水平方向的高频信息, LH区域即为 $\omega_j^2$ 保留原图像的垂直方向的高频信息, HH区域即为 $\omega_j^1$ 保留原图像的对角线方向的高频信息<sup>[2,3]</sup>。

重构与分解是相互伴随的。得到的重构公式为:

$$a_k^{j-1} = \sum_{l \in Z^2} p_{k-2l} a_l^j + \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{l \in Z^2} p_{k-2l}^\lambda b_l^{j-1, \lambda} \quad (1.17)$$

对图像进行上采样后, 通过上述公式计算即可得到重构后的系数。

## 2.2 小波变换对高频分量边缘检测

小波变换边缘检测算法是将图像与滤波器作卷积处理获得平滑图像以便于后续的边缘检测<sup>[9]</sup>。小波分析良好的时频局部化能力, 天然的多尺度特征, 可将图像分解成交织在一起的多尺度成分, 并对大小不同的尺度成分采用相应粗细的时域或空域取样步长。即任意一个信号都可以由小波系数来刻画。由于收敛于Canny算子的B样条小波既能近似满足Canny提出的最优原则<sup>[2]</sup>, 又可以快速有效的实现边缘检测, 所以本文算法中选取B样条小波对图像进行边缘检测。

对图像进行多层小波分解后, 每一层的高频分量都提供了不同频率的边缘信息。多尺度小波边缘检测就是利用一个二阶可导平滑函数在不同尺度下所检测的信号, 根据一次微分找出它的突变点。一次微分的极大值点对应平滑后信号的拐点<sup>[10]</sup>。尺度小时图像边缘信息更丰富; 尺度大时, 噪声得到抑制, 但边缘精度差。因此将多尺度图像融合起来发挥各尺度的优势, 得到精确的边缘信息<sup>[11-13]</sup>。

定义b样条函数 $\theta(x, y)$ 为二维平滑函数, 当尺度为 $s$ 时, 令

$$\theta_s(x, y) = \frac{1}{s^2} \theta\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) \quad (2.1)$$

记：

$$\psi^1(x,y) = \frac{\partial \theta(x,y)}{\partial x} \psi^2(x,y) = \frac{\partial \theta(x,y)}{\partial y} \quad (2.2)$$

则  $f(x,y)$  在尺度为  $s$ ，二维小波函数  $\psi^1(x,y)$ ， $\psi^2(x,y)$  的小波变换分别定义为：

$$W_s^1 f(x,y) = f * \psi_s^1(x,y), W_s^2 f(x,y) = f * \psi_s^2(x,y) \quad (2.3)$$

用列向量可表示为：

$$\begin{bmatrix} W_s^1 f(x,y) \\ W_s^2 f(x,y) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} (f * \theta_s)(x,y) \\ \frac{d}{dy} (f * \theta_s)(x,y) \end{bmatrix} = S \nabla (f * \theta_s)(x,y) \quad (2.4)$$

梯度矢量的模为：

$$M_s f(x,y) = \sqrt{|W_s^1 f(x,y)|^2 + |W_s^2 f(x,y)|^2} \quad (2.5)$$

梯度矢量与水平方向的夹角为：

$$A_s f(x,y) = \arctan \left[ \frac{W_s^2 f(x,y)}{W_s^1 f(x,y)} \right] \quad (2.6)$$

对固定的尺度  $s$ ，在二维平面上的一点  $(x,y)$ ，在由  $A_s f(x,y)$  给出的方向上，若  $M_s f(x,y)$  是局部极大值点，则点  $(x,y)$  为边缘点。

以下为对高频分量的检测步骤：

- (1) 设置B样条滤波器系数及分解级数  $J = 2$ 。
- (2) 对图像进行分解并求出不同尺度下的  $(x,y)$  的梯度方向和梯度矢量。
- (3) 沿着梯度方向检测小波模极大值点得到图像的边缘点。
- (4) 对检测出的边缘点进行判定是否为真边缘，使用两个阈值  $T_1, T_2$ ，其中  $T_1 < T_2$ ，当梯度值大于  $T_2$  的为强边缘像素，值在  $T_1$  之间的为弱边缘像素，通过判断8领域是否高于阈值判断真假边缘。

(5) 对边缘图进行重构得到高频边缘子图像。

对高频分量检测的算法流程图如下图1所示。

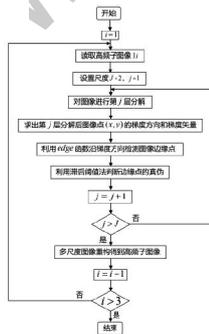


图1 检测高频分量的算法流程图

Fig.1 Algorithm flow chart for detecting high frequency components

### 2.3 数学形态学对低频分量边缘检测

数学形态学是一种非线性滤波方法，基本运算包括膨胀、腐蚀、开运算和闭运算。一般而言，膨胀运算是把图像连接成分的边界扩大一层。将与物体接触的所有背景点合并到物体中，使目标增大，可添补目标中的空洞。腐蚀运算把连接成分的边界点去掉从而缩小一层，使目标缩小，可以消除小于结构元素的噪声点。开运算是先腐蚀后膨胀的过程，可以消除图像上细小的噪声，并平滑物体边界。闭运算是先膨胀后腐蚀的过程，可以填充物体内部细小的空洞<sup>[14-16]</sup>。设  $f$  为输入图像， $b$  是结构元素， $G$  为输出图像，则将以上运算表示出来为：

腐蚀运算：

$$G(x,y) = f(x,y) \ominus b(x,y) = f(x,y) - \max_{(i,j)} f(x+i,y+j) \quad (3.1)$$

膨胀运算：

$$G(x,y) = f(x,y) \oplus b(x,y) - f(x,y) = \max_{(i,j)} f(x-i,y-j) - f(x,y) \quad (3.2)$$

开运算：

$$f \bullet b = (f(x,y) \ominus b(x,y)) \oplus b(x,y) \quad (3.3)$$

闭运算：

$$f \bullet b = (f(x,y) \oplus b(x,y)) \ominus b(x,y) \quad (3.4)$$

数学形态学边缘检测效果与结构元素形状、大小都有着十分重要的联系。一定尺寸的背景图像就是结构元素，通过与图像进行各种形态学运算，实现对图像的形态学变换。在数学形态学边缘检测中，结构元素是一个重要的概念，它在各种形态变换中起着重要作用。小尺寸的结构元素去噪能力弱，但能检测到边缘细节；大尺寸的结构元素去噪能力强，但检测的边缘粗糙<sup>[8]</sup>。本文利用数学形态学方法对低频子图像进行边缘检测，低频近似子图像噪声较少，所以本文选用小尺寸的结构元素。

### 2.4 高低频边缘的有效重构

区别于文献[15,16]直接将低频边缘和高频边缘重构即得到图像的边缘检测图，为得到效果更加的边缘结果图，消除噪音干扰造成的伪边缘，本文在最终对低频边缘和高频边缘进行有效重构。首先利用第一部分介绍的重构算法对低频边缘和高频边缘进行重构得到边缘图。在对低频边缘进行重构得到低频结果图，对得到的低频结果图作形态学模糊操作。本文利用结构元素对低频结果图作闭合操作，结构元素为半径为9的圆盘。为抑制边缘图像中的噪音区域，形态学模糊操作得到的结果作用在边缘图上，即令边缘图与其进行点乘运算得到原图像的边缘图。本文整体算法流程图如图2所示。

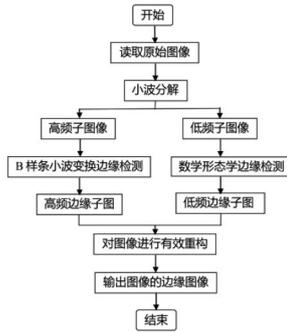


图2 边缘检测流程图

Fig.2 Flow chart of edge detection

### 3 结论(Conclusion)

本文以荷花图为例进行基于小波变换及数学形态学边缘检测算法实验。实验中利用Haar小波对图像进行分解与重构。在对高频分量小波边缘检测中，小波分解级数设定为2。实验结果如图3所示，图(a)为带有一定噪音的原图像；图(b)为利用数学形态学边缘检测低频分量边缘图，检测出的花干及花朵细节较佳，噪音少；图(c)为利用b样条小波变换检测出的高频分量边缘图，依次为高频水平边缘子图，高频垂直边缘子图和高频对角线边缘子图，如图噪声依旧存在，但花朵细节丰富；图(d)为传统小波变换边缘图，如图在花干及花朵部分细节缺失较多；图(e)为将低频边缘与高频边缘直接重构得到的结果，重构图像依然检测出很多噪声；图(f)为本文算法重构图，相比较实验结果表明有效重构后图像有效的提高了边缘细节的提取效果，在消除噪音的方面效果更佳，得到了更加精确地边缘图。

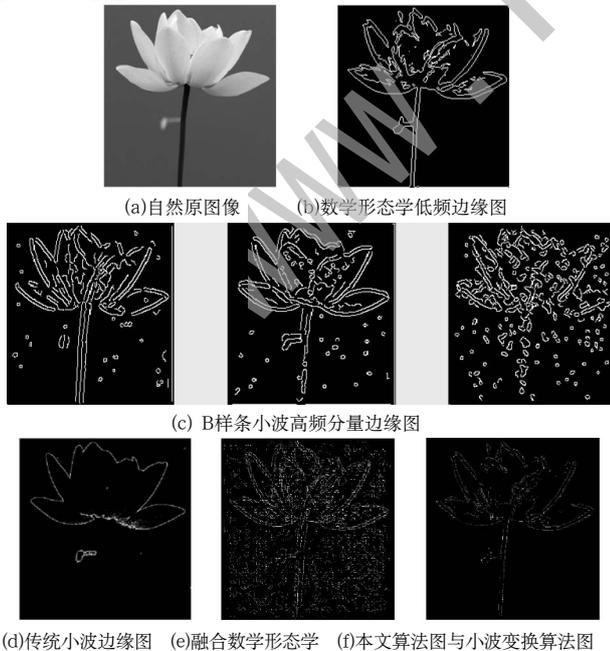


图3 实验结果图

Fig.3 Experiment result diagram

### 参考文献(References)

[1] Mallat S.A Wavelet Tour of Signal Processing[J].Academic press,1998,31(3):83-85.

[2] Canny J.A computational approach to edge detection [J].IEEE Trans PAMI,1986,8(1):679-698.

[3] Mallat S,Hwang W L.Singularity detection and processing with wavelets [J].IEEE Trans,2002,38(2):617-643.

[4] 刘小豫,韩丽娜,赵蕾.基于B样条小波的图像边缘检测算法[J].电子设计工程,2013,21(14):178-180.

[5] 陈虎,王守尊,周朝辉.基于数学形态学的图像边缘检测方法研究[J].图学学报,2004,25(2):112-115.

[6] 王海虹,曾妮,陆威,等.基于小波变换和数学形态学的激光成像雷达图像边缘检测[J].中国激光,2008,35(6):903-906.

[7] 梁勇,李天牧.多方位形态学结构元素在图像边缘检测中的应用[J].云南大学学报(自然科学版),1999,21(5):392-394.

[8] SONG J,DELP E J.The analysis of morphological filters with multiple structuring elements[J].Computer Vision Graphics and Image Processing,1990,50:308-328.

[9] 薛岚燕,程丽.基于融合技术的小波变换和数学形态学的边缘检测算法[J].华中师范大学学报:自然科学版,2013,47(01):27-30.

[10] 刁彦华,王玉田,陈国通.基于小波变换模极大值的信号奇异性检测[J].河北工业科技,2004,21(1):1-3.

[11] 杨小娜,黄欢,徐晓煜,等.基于小波模极大值多尺度的图像边缘提取[J].贵州大学学报(自然版),2013,30(1):91-93.

[12] 岳明明,杨国为.基于B样条小波模极大值的多尺度边缘检测算法[J].工业控制计算机,2016,29(9):108-109.

[13] 费勤水,张榆锋,陆玉婧,等.基于多尺度小波边缘检测改进GVF snake的颈部淋巴结超声图像轮廓提取[J].计算机应用与软件,2015(4):186-190.

[14] 陶洪久,柳健.基于小尺度的数学形态学遥感图像边缘检测方法[J].武汉理工大学学报(信息与管理工程版),2001,23(4):19-22.

[15] 胡晓辉,张晓颖,陈俊莲.一种融合小波变换和数学形态学的图像边缘检测算法[J].铁道学报,2011,33(3):45-48.

[16] 朱士虎.融合小波变换与数学形态学的图像边缘检测[J].现代计算机(专业版),2011(24):38-41.

### 作者简介:

李颖莹(1994-),女,硕士生.研究领域:小波分析与应用.  
魏连鑫(1977-),男,博士,讲师.研究领域:数值逼近与小波分析.