

一种基于近场动力学的纤维复合材料仿真加速方法研究

周吉¹, 钱松荣², 冉秀¹, 徐峥匀¹

(1.贵州大学机械工程学院, 贵州 贵阳 550025;

2.贵州大学省部共建公共大数据国家重点实验室, 贵州 贵阳 550025)

✉lgqzj@foxmail.com; qiansongr@163.com; 2501348901@qq.com; 909718747@qq.com



摘要: 近场动力学是一种使用积分方程来描述材料受力情况的方法, 在解决不连续问题上有很好的应用前景。在近场动力学仿真过程中, 纤维复合材料的计算需要消耗大量的计算机资源。而庞大的计算量是计算效率低的一个重要影响因素, 因此提出一种结合经典弹性力学解析法的加速方法, 能有效提升计算效率。引入一种通过误差计算数值迭代收敛速度的评价方法, 并完成了纤维复合材料仿真程序开发、迭代误差算法设计和可视化程序开发。经过验证, 该程序能有效模拟单层纤维复合材料的位移情况, 在迭代误差收敛达到 1×10^{-8} mm时迭代收敛速度提升1倍。

关键词: 近场动力学理论; 纤维复合材料; 数值计算; 程序开发

中图分类号: TP305 **文献标识码:** A

Research on a Simulation Acceleration Method of Fiber Composites based on Peridynamics

ZHOU Ji¹, QIAN Songrong², RAN Xiu¹, XU Zhengyun¹

(1.School of Mechanical Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China;

2.State Key Laboratory of Public Big Data, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

✉lgqzj@foxmail.com; qiansongr@163.com; 2501348901@qq.com; 909718747@qq.com

Abstract: Peridynamics is a method of using integral equations to describe the force of materials, and it has a good application prospect in solving discontinuous problems. In the process of peridynamics simulation, the calculation of fiber composites consumes many computer resources. The huge computational volume is an important influence factor of the low calculation efficiency. Therefore, this paper proposes an acceleration method combined with classical elastic analysis method, which can effectively improve the calculation efficiency. A method for evaluating the convergence rate of numerical iteration through error calculation is introduced, and the development of fiber composite simulation program, iterative error algorithm and visual program are completed. After verification, the program can effectively simulate the displacement of single-layer fiber composites. When the iterative error convergence reaches 1×10^{-8} mm, the iterative convergence speed is doubled.

Keywords: peridynamics theory; fiber composites; numerical calculation; program development

1 引言(Introduction)

纤维复合材料因具有比重小、比强度高、比模量大和动力学性能优越等特点, 广泛应用于航空航天、土木工程、海洋工程等领域。在以往的研究中, 主要使用经典弹性力学来描述复合材料的本构关系, 其中有限元方法应用最为广泛^[1]。

当SILLING博士在2000年提出近场动力学理论后^[2], 纤维复合材料的近场动力学本构模型很快建立起来。但是, 在求解这种近场动力学数值问题时需要耗费大量的计算机资源^[3], 耗费时间较多, 工作效率低, 阻碍了近场动力学的应用速度。

针对这一问题, 本文提出一种结合经典弹性力学解析

法^[4]的近场动力学加速方法。为了验证该方法的有效性,引入以迭代误差收敛速度为标准^[5]的评价方法,并设计开发相关程序。结果表明,该程序能有效模拟单层纤维度和材料受载荷位移情况;在迭代误差收敛到 1×10^{-8} mm时速度提升1倍,在精度标准要求不高时,收敛速度更明显;另外,迭代误差之和最大值相差近一个数量级,加速效果明显。

2 近场动力学理论(Peridynamics theory)

近场动力学理论有效解决了传统的局部和非局部理论在不连续问题求解上的缺陷。在近场动力学理论公式中,使用的是位移而不是位移倒数,避免了传统经典力学理论中在求解时因局部不连续而导致不可微的问题。但键型的近场动力学理论在求解塑性问题时存在一定困难,为解决这个问题,SILLING提出了基于状态的近场动力学理论。在后续的研究中,学者们发现近场动力学数值求解过程非常适合使用并行化计算方法;将近场动力学与有限元方法耦合,既发挥出有限元在计算上的速度优势,又应用到近场动力学在裂纹扩展方面的优势^[6];用热力学与近场动力学耦合,发现了近场动力学在求解热力学问题方面的优势;此外,还建立了纤维复合材料的近场动力学模型,并有效地运用。

近场动力学设定材料模型由若干物质点构成,每一物质点都拥有半径为 δ 的领域 H ,也称为近场区域,如图1所示。近场区域内物质点与物质点之间的连接关系称为键,表示为图1中 x_i 和 x_j 间的连接键,使得物质点 x_i 与物质点 x_j 之间具有相互作用关系。

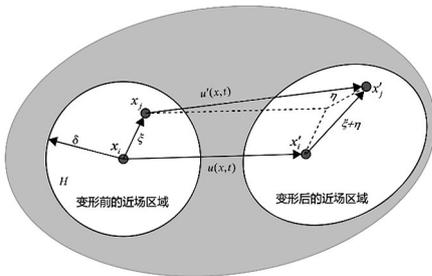


图1 物质点的相互作用关系

Fig.1 Interactive relations of the material points

键在外载荷的作用下产生变形,键变形产生近场力 $f(\eta, \xi)$,称为近场力,也称为本构力函数。在图1中,对于每一个物质点 i ,均受到其近场区域 H 内的所有物质点的键力,如式(1)所示:

$$\rho_i \frac{\partial^2 u_i(x, t)}{\partial t^2} = \int_H f(\eta, \xi) dV_j + b_i, \forall j \in H \quad (1)$$

其中, ρ 为材料的密度, u 为物质点的位移矢量, η 为物质点之间的位移差, ξ 为物质点之间的间距。式(1)中近场力 $f(\eta, \xi)$ 是关于位移差 η 和键长度 ξ 的函数,位移之差可由每一时间步成对物质点之间的位移求得,而键长则是原始的键长。近场力的表示函数及变换之后如式(2)和式(3)所示:

$$f(\eta, \xi) = \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|} f(y, \xi), \quad \forall \eta, \xi \quad (2)$$

变换之后可得:

$$f(\eta, \xi) = \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|} cs \quad (3)$$

其中,伸长率 s 也是关于位移差 η 和键长度 ξ 的函数,其物理意义是伸长后的键长度与原始键长之差再与原始键长求商,其值的求解方法如式(4)所示。微模量 c 类似于经典弹性力学中的弹性模量,是关于弹性模量、泊松比、近场区域半径的函数,这些参数基本都可以从材料手册中查到。伸长率 s 和微模量 c 的公式如式(5)所示:

$$s = \frac{|\xi + \eta| - |\xi|}{\xi} = \frac{y - |\xi|}{|\xi|} \quad (4)$$

$$c = \frac{6E}{\pi \delta^4 (1 - 2\nu)} \quad (5)$$

根据式(1)进行离散化,使用中心差分公式变化如式(6)所示:

$$\frac{\partial^2 u_i^n(x, t)}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (6)$$

式(1)中的 i 表示第 i 个物质点,而 n 表示第 n 个时间步。中心差分公式可近似拟合积分数值,使积分的求解变得容易。通过中心差分方法,随着每一时间步的不断迭代,即可求得物质点的位移情况,进而得到材料物质点变形后的位置。最终,材料变形模型可通过可视化软件展示出来。由式(6)进行简单的数学变换可得到如式(7)所示的位移求解方程:

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t^2}{\rho} \left(\int_H f(\eta, \xi) dV_j + b_i \right) + 2u_i^n - u_i^{n-1} \quad (7)$$

3 纤维复合材料层合板模型(Fiber composite laminate model)

对于复合材料层合板动力学与破坏损伤的机理研究,学者们已提出并发展了很多理论及数值计算方法,其中有限元法最为突出。最早有CHANG等^[7]提出二维的纤维增强复合材料层合板损伤模型,并使用该模型进行单层板多种角度纤维的损伤模拟研究。TAN^[8]使用折减系数法对受损伤的材料刚度进行折减,实现损伤函数的作用,达到复合材料渐近损伤过

程的数值模拟效果。在基于近场动力学的复合材料的力学性能模拟中，不仅在断裂损伤方面的研究发展迅速，静态分析方向的研究也快速发展^[9]。复合材料层合板模型由多层单层板黏合而成，如图2所示。

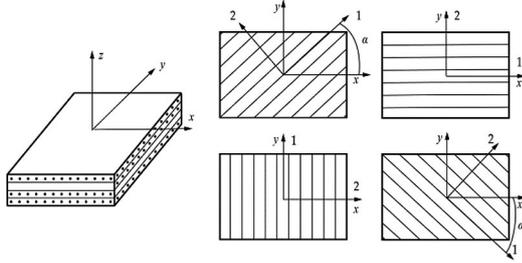


图2 复合材料层合板模型

Fig.2 Composite laminates model

在大多数情况下，单层复合材料不单层使用，而作为层合板材料的基本单元，每一层单层板都有各自的材料属性和厚度。单层板通常是正交各向异性的，在经典复合材料力学中正交各向异性复合材料单层板的应力应变关系由刚度矩阵 Q 表示，如式(8)所示：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

其中， Q_{11} 为纵向刚度， Q_{22} 为横向刚度， Q_{12} 为耦合影响刚度，而 Q_{66} 则表示剪切模量。在式(9)中列出工程弹性系数如下：

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (9)$$

其值大小与纵向弹性模量 E_{11} 、横向弹性模量 E_{22} 、泊松比 ν 和面内剪切模量 G_{12} 有关。其中：

$$\nu_{12}/E_{11} = \nu_{21}/E_{22} \quad (10)$$

复合材料的键型近场动力学本构方程如式(11)所示，是关于纤维方向的函数^[10]。与各向同性材料不同，式(5)中的微模量 c 不再是一个固定的与弹性模量有关的固定值，这里 $c = 4\delta(b_{FT} + \mu_F b_F)$ 。通过改变式(3)中的参数即可得到如式(11)所示的本构模型：

$$f(\eta, \xi) = 4\delta \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|} (b_{FT} + \mu_F b_F) s \quad (11)$$

在式(11)中，近场动力学模型物质点之间的键与对应的复合材料纤维方向一致时，纤维方向标记 μ_F 为1，表示当前的键为纤维键，反之为基体键；而 b_F 则表示纤维键的附加微模量大小，再加上基体键的微模量值 b_{FT} ，就得到纤维键的微模量。

方程关系如式(12)所示：

$$\begin{cases} \mu_F = \begin{cases} 1, & \text{向量}[x_j - x_i] \text{ 平行于纤维方向} \\ 0, & \text{其他情况} \end{cases} \\ b_F = \frac{Q_{11} - Q_{12}}{2\delta \left[\sum_{j=1}^N |x_j^n - x_i^n| V_j \right]} \\ b_{FT} = \frac{6Q_{66}}{\pi h \delta^4} \end{cases} \quad (12)$$

4 数值计算加速方法与仿真分析(Acceleration method of numerical calculation and simulation analysis)

4.1 加速方法与评价方法

在进行复合材料单层板的数值仿真过程中，计算速度对计算机性能的要求较高，计算效率低，为了解决这个问题，提出一种先进行解析法求解，后进行近场动力学计算实现微调的方法。解析法的物质点初始分布位置如式(13)所示，公式中的 u_i 与公式(7)中的值一样，表示第 i 个物质点的位移量，仅 x 轴方向有初始位移。

$$u_i = (x_i - \frac{a}{2}) / (\frac{a}{2}) \times \Delta t \quad (13)$$

迭代法是数值计算中的一种经典方法，应用于方程求根、方程组求解、矩阵求特征值等方面。近场动力学理论就是这样一种迭代方法，在数值求解时，依据外力与内部近场力之间的平衡关系进行反复迭代，最终材料内的物质点达到各自的平衡位置。为了对比加速效果，引入一种迭代误差计算收敛速度评价方法，如式(14)所示。可计算每一个物质点的迭代误差值的模 ς_i ，将全部迭代误差的模 ς_i 相加，得到材料所有物质点的迭代误差之和 ς_{all} 。利用迭代误差之和 ς_{all} 与迭代次数时间步 t 之间的关系，可以求得迭代收敛速率。

$$\varsigma_{all} = \sum_{i=1}^N \varsigma_i \quad (14)$$

其中， ς_{all} 为第 t 时间步所有物质点的总迭代位移误差， N 为物质点个数， ς_i 为第 i 个物质点的位移误差。通过式(13)求得的 u_i ，可计算单个物质点的迭代误差值，如式(15)所示：

$$\varsigma_i = \sqrt{(u'_{x_i} - u''_{x_i})^2 + (u'_{y_i} - u''_{y_i})^2} \quad (15)$$

4.2 程序实现

程序通过C语言编程实现，通过OpenMP并行加速，输入内容包括材料密度 ρ 、弹性模量 E 、泊松比 ν 、断裂能 G_0 等参数；程序可分为三层循环，包括时间步循环、物质点循环和

近场区域键循环。并行计算被采用在物质点循环层的位置，在之前的研究中，已发现物质点循环层的并行加速效果是最优的^[11]，流程图如图3所示。

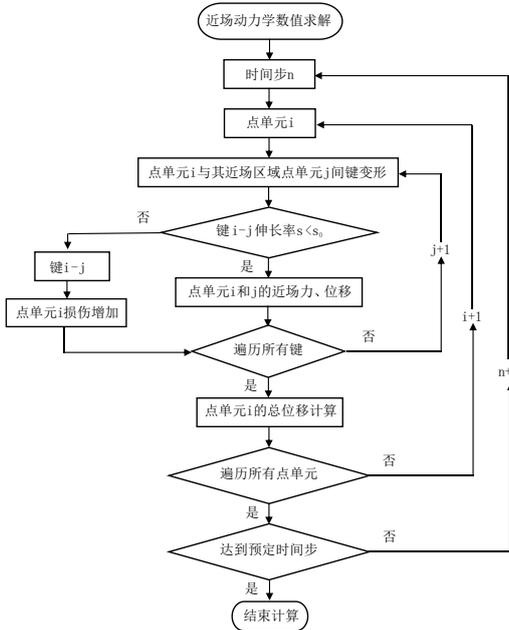


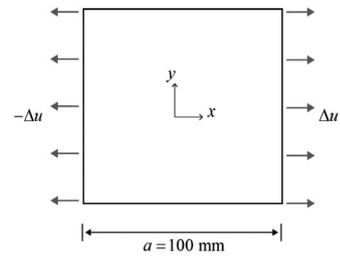
图3 求解程序设计流程图

Fig.3 Flow chart of solution programming design

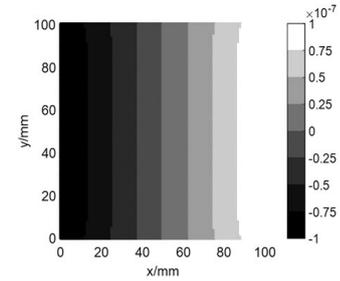
4.3 基体材料的准静态问题求解

选取长度 $a = 100 \text{ mm}$ 的单层增强纤维复合材料板作为分析计算模型^[1]，如图4(a)所示。物质点划分间距为 $\Delta x = 1 \text{ mm}$ ，边界受力区域宽度为 $2 \times \Delta x = 2 \text{ mm}$ ，一共10,200个物质点。使用匀速位移的方式进行加载，保证材料不被破坏的情况下进行数值计算。当达到 $u = 10^{-7} \text{ mm}$ 时加载停止，时间步为 $\Delta t = 10^{-8}$ ，加载速度为 $\Delta u = 0.2 \text{ m/s}$ 。当达到第50时间步时，边界达到位移稳定状态，此时非边界区域继续受力计算直到达到稳定状态。阻尼的选取方法来自文献[12]，本文取的阻尼系数 $\Omega = 0.5 \times 10^9 \text{ Nm/s}$ 。

对于各向同性材料，不会有纤维增强复合材料的各向异性的问题。取弹性模量 $E = 8.73 \text{ GPa}$ ，当达到第7,000时间步时，即 $t = 0.7 \mu \text{ s}$ 时所有物质点的迭代收敛误差之和为 $\zeta_{\text{all}} = 3.1320 \times 10^{-10}$ ，此时各向同性的基体材料的位移分布情况如图4(b)所示。从位移结果可以看出，上下靠边界位置呈发散状态，而不是由上向下贯通的直线，主要是由于边界效应导致的，但对于本文的论点来说，其影响可忽略不计。从4.4部分中可以看出，复合材料特有的位移量远远大于边界效应的影响效果。



(a)基体材料载荷示意图



(b)基体材料位移分布结果

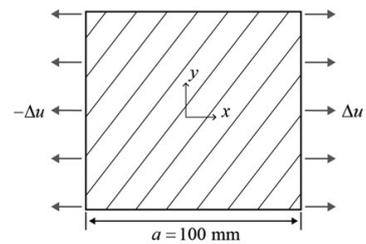
图4 基体材料仿真模型与结果

Fig.4 Matrix material simulation model and results

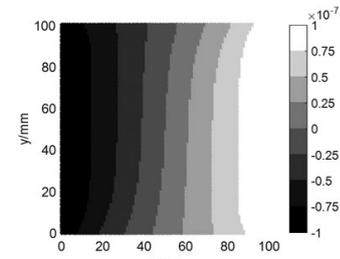
4.4 复合材料的准静态问题求解

复合材料单层板的材料参数来自文献[13]，纤维方向即纵向弹性模量 $E_{11} = 142.1 \text{ GPa}$ ，横向弹性模量 $E_{22} = 8.73 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 1,580 \text{ kg/m}^3$ ，泊松比 $\nu_{12} = 0.33$ ，面内剪切模量 $G_{12} = 4.49 \text{ GPa}$ 。实现单一变量受力加载情况与基体材料一样，如图5(a)所示。

对于单层复合材料，当达到第7,000时间步时，即 $t = 0.7 \mu \text{ s}$ 时，所有物质点的迭代收敛误差和为 3.2161×10^{-9} ，此时各向同性的基体材料的位移分布情况如图5(b)所示。在结果中可以看出，单一材料的物质点沿x轴方向呈线性分布，而复合材料的物质点呈非线性分布。



(a)复合材料载荷示意图



(b)复合材料位移分布结果

图5 复合材料单层板仿真模型与结果

Fig.5 Composite laminates simulation model and results

4.5 加速效果分析

分别对纤维角度为0°、30°、45°、60°和90°的单层板模型进行计算分析，从0时间步到6,000时间步的误差曲线如图6所示。由于-60°、-45°、-30°分别与60°、45°、30°的迭代误差曲线相似，这里不再列出-60°、-45°和-30°的曲线图。

如图6(a)所示，0°纤维方向在1,500时间步，加速后的迭代误差逐渐平稳，未加速计算模型的迭代误差在3,000时间步后才逐渐稳定，计算效率加快1倍。通过观察发现，各种角度的迭代误差加速效果非常明显，最大值之差为 9×10^{-7} ；另一方面，90°纤维的单层板迭代误差曲线较其他角度波动剧烈，这是因为当纤维角度为90°时，受力方向的键主要为基体键，而基体键的弹性模量较小，导致式(5)中的微模量变小，引起式(3)中的近场力变小，加速度变小，对阻尼的影响变小。

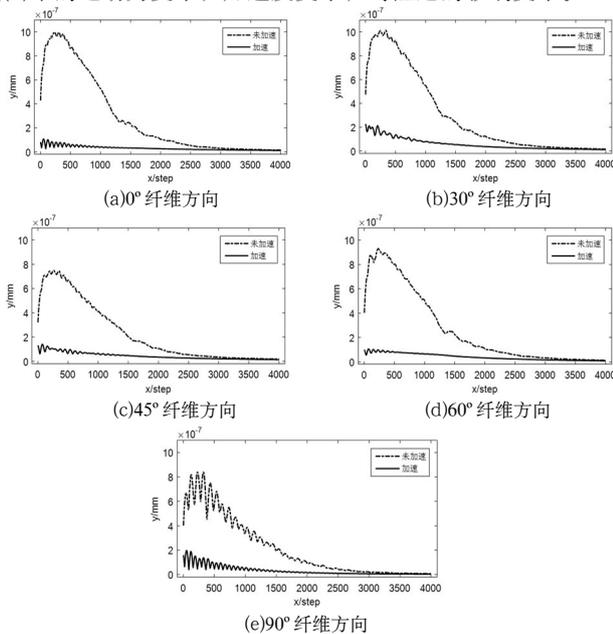


图6 不同纤维方向单层复合材料迭代误差收敛曲线图

Fig.6 Iterative error convergence curves of single-layer composites with different fiber directions

为了展示不同角度纤维方向在不同时间步的变化效果，列出从1,000时间步到6,000时间步的误差值，如表1所示，间隔为1,000时间步。可以看出，当1,000时间步时迭代误差的大小相差一个数量级，随着时间步的不断增长，逐渐收敛。

表1 不同纤维方向单层板各时间步迭代误差

Tab.1 Iterative error of each time step of single-layer plate with different fiber directions

纤维角度	1,000时间步的 ζ_{all}		2,000时间步的 ζ_{all}		3,000时间步的 ζ_{all}	
	未加速	加速	未加速	加速	未加速	加速
0°	5.63E-07	4.36E-08	1.21E-07	2.58E-08	3.06E-08	1.67E-08
30°	5.76E-07	7.83E-08	1.22E-07	3.83E-08	3.55E-08	2.07E-08
45°	4.37E-07	5.89E-08	1.10E-07	3.54E-08	3.63E-08	2.11E-08
60°	5.14E-07	6.68E-08	1.20E-07	3.29E-08	3.29E-08	1.66E-08

(续表)

纤维角度	4,000时间步的 ζ_{all}		5,000时间步的 ζ_{all}		6,000时间步的 ζ_{all}	
	未加速	加速	未加速	加速	未加速	加速
90°	4.00E-07	5.94E-08	1.14E-07	1.59E-08	2.34E-08	7.47E-09
-30°	5.44E-07	6.96E-08	1.20E-07	3.39E-08	3.32E-08	1.70E-08
-45°	4.37E-07	5.89E-08	1.10E-07	3.54E-08	3.63E-08	2.11E-08
-60°	4.62E-07	7.58E-08	1.17E-07	3.02E-08	3.19E-08	1.45E-08
0°	1.46E-08	1.13E-08	9.05E-09	7.78E-09	6.22E-09	5.34E-09
30°	1.66E-08	1.22E-08	9.25E-09	7.50E-09	5.92E-09	4.70E-09
45°	1.86E-08	1.36E-08	1.16E-08	8.89E-09	7.51E-09	5.88E-09
60°	1.28E-08	8.38E-09	5.67E-09	4.27E-09	2.89E-09	2.17E-09
90°	7.03E-09	3.38E-09	3.00E-09	1.73E-09	1.41E-09	9.60E-10
-30°	1.30E-08	8.50E-09	5.82E-09	4.31E-09	2.98E-09	2.18E-09
-45°	1.86E-08	1.36E-08	1.16E-08	8.89E-09	7.51E-09	5.88E-09
-60°	1.22E-08	7.67E-09	6.00E-09	4.25E-09	3.25E-09	2.39E-09

5 结论(Conclusion)

本文提出一种基于近场动力学的纤维复合材料仿真加速方法，在数值理论的基础上，设计开发仿真程序，实现数据的可视化，引入迭代误差收敛速率来评价该方法的有效性。通过4.4部分的计算模型，验证了本文的仿真程序能有效模拟单层纤维复合材料的位移，与各向同性的基体材料的位移结果不同，纤维复合材料的位移结果是非线性的。在4.5部分，对0°、30°、45°、60°和90°的复合材料单层板进行有效性分析，已展示出迭代误差收敛曲线图。结果表明，在迭代误差收敛达到 1×10^{-8} mm时速度提升1倍，在精度标准要求不高时，迭代收敛速度提升更为明显。同时，列出0°、30°、45°、60°、90°、-30°、-45°和-60°的复合材料单层板分别在1,000、2,000、3,000、4,000、5,000和6,000时间步的迭代误差之和的值，结果表明，迭代误差最大值相差近一个数量级，加速效果明显。但此加速方法目前仅适用于准静态或静态问题求解，在动态问题求解方面的适用性还有待验证。综合分析实验结果，针对单层纤维复合材料求解准静态问题的加速方法是有效的。

参考文献(References)

- [1] SABA N, JAWAID M, ALOTHMAN O Y, et al. A review on dynamic mechanical properties of natural fibre reinforced polymer composites[J]. Constr Build Mater, 2016, 106: 149-159.
- [2] SILLING S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000, 48(1):175-209.
- [3] HU W K, HA Y D, BOBARU F. Peridynamic model for dynamic fracture in unidirectional fiber-reinforced composites[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,

(下转第6页)