

基于简化超体积的 NSGA-II 算法

纪红, 赵建印, 陈健, 葛睿

(海军航空大学, 山东 烟台 264001)

✉ ytjihong@163.com; 13791182798@163.com; 57991949@qq.com; gr33995@126.com



摘要:针对 NSGA-II 算法在高维多目标优化时选择压力较小, 不适用于高维空间的问题, 提出一种基于简化超体积的 NSGA-II 算法, 利用超体积在高维空间中可以准确评价个体优劣的特点, 使用简化超体积代替拥挤距离对种群中的个体进行比较, 在更新种群时保留收敛性和分布性更好的个体。通过与 4 个先进的、具有代表性的高维多目标进化算法(NSGA-III、MOEA/DD、KnEA、RVEA)的对比实验表明, 基于简化超体积的 NSGA-II 算法在求解大多数测试函数时, 获得了更优的解集, 证明了该算法处理高维多目标优化问题的优越性能。

关键词:高维多目标优化; 进化算法; 超体积

中图分类号:TP301 **文献标志码:**A

NSGA-II Algorithm Based on Simplified Hypervolume

Ji Hong, Zhao Jianyin, Chen Jian, Ge Rui

(Naval Aviation University, Yantai 264001, China)

✉ ytjihong@163.com; 13791182798@163.com; 57991949@qq.com; gr33995@126.com

Abstract: Aiming at the problem that the NSGA-II algorithm has low selection pressure in many-objective optimization and is not suitable for high-dimensional space, this paper proposes a NSGA-II algorithm based on simplified hypervolume. As hypervolume can accurately evaluate the advantages and disadvantages of individuals in high-dimensional space, individuals in the population are compared by simplified hypervolume instead of crowding distance, and individuals with better convergence and distribution are retained when updating the population. The comparative experiment with four many-objective evolutionary algorithms (NSGA-III, MOEA/DD, KnEA, RVEA) shows that the proposed NSGA-II algorithm based on simplified hypervolume achieves a better solution set when solving most test functions, which proves its excellent performance in handling many-objective optimization problems.

Key words: many-objective optimization; evolutionary algorithm; hypervolume

0 引言(Introduction)

进化算法通过模拟生物种群的进化迭代过程处理传统优化算法难以解决的复杂问题, 具有鲁棒性强、应用广泛等优点, 自 David Schaffer 首次提出使用进化算法求解多目标优化问题的矢量评价遗传算法 VEGA^[1]以来, 进化算法在求解多目标优化问题上得到了广泛的应用, 涌现出了许多经典的多目标进化算法^[2-4]。2002 年, SRINIVAS 等^[5]改进了非支配排序遗传算

法 NSGA, 提出了使用拥挤距离维持种群分布性和多样性的快速非支配排序方法——NSGA-II^[6], 通过快速非支配排序降低算法的计算复杂度, 并通过拥挤距离维持种群的多样性, 采用的精英保留策略使得父代中优秀的个体得以保存, 具有速度快、收敛性好的特点, 但在面对高维多目标优化问题时, NSGA-II 算法的选择压力较小, 拥挤距离也不适用于高维空间。因此, 本文提出了基于简化超体积的 NSGA-II 算法, 使用简化的超体积

代替拥挤距离对种群中的个体进行比较,在更新种群时保留收敛性和分布性更优的个体,增强 NSGA-II 算法求解高维多目标问题的能力。

1 简化超体积(Simplified hypervolume)

超体积(Hypervolume, HV)^[7]可以评估高维空间中个体的收敛性和分布性,增强算法的选择压力,指导搜索过程向 Pareto 最优前沿面(所有 Pareto 最优解的目标向量所组成的集合)靠近,但计算复杂度较高,因此本文采用简化的超体积^[8]对个体进行比较,选择收敛性和分布性更好的个体保留。

简化超体积的基本思想是利用空间中的邻居解信息,对于每一个目标函数,确定两侧的邻居解后,选取两个邻居解在每个目标函数上的最大值作为参考点,计算该解和参考点之间的体积,依次计算该解在每个目标函数上的体积,其中最小的即该解的超体积值,以此反映周围空间的稀疏度,降低计算复杂度。

为了方便说明,以两目标优化问题为例。如图 1 所示,解 a 和解 b 是解 x 在目标函数 f_1 方向上两侧的邻居解,点 R 是由它们所确定的参考点, x 和 R 之间的体积 V 即为所求。分别求得解 x 在目标函数 f_1 和 f_2 方向上的两个体积,取最小的体积作为该解的超体积值。当解 x 的收敛性更好时, x' 与 R 之间的体积更大,当解 x 的分布性更好时,邻居解所确定的参考点 R' 与 x 之间的体积也更大,因此可以通过超体积值反映解的收敛性和分布性,超体积越大,解的收敛性和分布性越好,从而估计解 x 的综合性能。

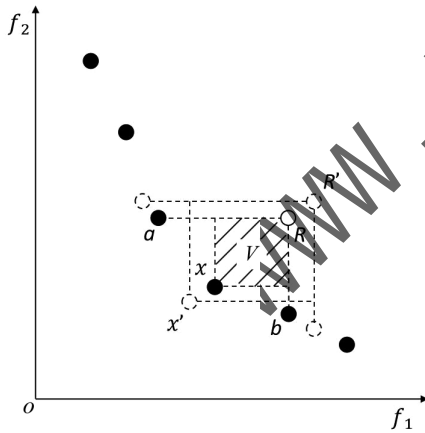


图 1 简化超体积对收敛性和分布性的估计

Fig. 1 The convergence and distribution estimated by the simplified HV

简化超体积的计算过程如下。

首先,根据公式(1)对种群 P 进行归一化操作,消除量纲影响:

$$f'_i(x) = \frac{f_i(x) - \min f_i}{\max f_i - \min f_i} \quad (1)$$

其中: $x \in P$; $f_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$ 是多目标优化问题的 m 个目标函数; $\min f_i$ 和 $\max f_i$ 是种群 P 中所有解在第 i 个目标

函数的最小值和最大值。

其次,对于要计算超体积值的解,依次找到该解在每个目标函数上的两个邻居解,取这两个邻居解的最大值作为参考点,并求得该解与参考点之间的体积。如图 2 所示,为了便于理解,以两目标优化问题为例, r_i^j 是第 i 个解在第 j 个目标函数上的两个邻居解所确定的参考点,由邻居解在目标函数 f_1 和 f_2 上的最大值确定,阴影部分 V_i^j 代表解 x_i 与参考点 r_i^j 之间确定的体积。

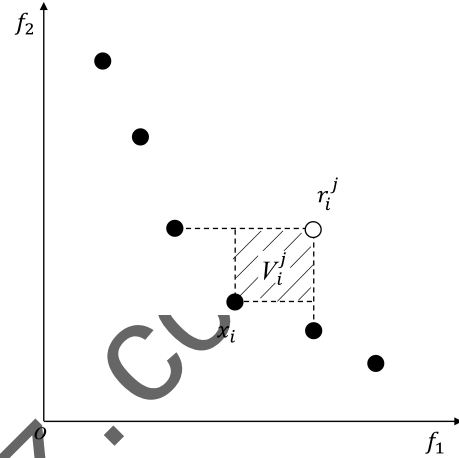


图 2 简化的超体积示意图

Fig. 2 Schematic diagram of simplified HV

对于边界点的处理,需要保留部分边界点用于维持种群的分布性,但是在高维空间中,可能会在多个目标函数方向上有共同的边界点,从而导致边界点的超体积很小,因此在计算边界点的超体积时,需要去掉目标函数值最大的项。综上所述,解 x_i 与参考点 r_i^j 之间确定的体积的计算公式如下:

$$V_i^j = \sqrt[|L|]{\prod_{k \in L} \{f'_k(r_i^j) - f'_k(x_i) + \partial\}} \quad (2)$$

其中: ∂ 是一个极小的正数, $L = \{k | f'_k(x_i) \neq \max\{f'_k(x) | x \in P\}\}$, r_i^j ($i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, m$) 和 V_i^j ($i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, m$) 分别是第 i 个解在第 j 个目标函数上的参考点和求得的体积。

最后,解 x_i 在所有目标函数上求得体积的最小值即为该解的超体积值,如公式(3)所示:

$$shV(x_i) = \min_{1 \leq j \leq m} V_i^j \quad (3)$$

其中: x_i , $i=1, 2, \dots, N$ 是种群 P 中的解; $shV(x_i)$ 是解 x_i 的简化超体积值。

2 基于简化超体积的 NSGA-II 算法(NSGA-II algorithm based on simplified hypervolume)

为提升 NSGA-II 算法求解高维多目标优化问题的能力,本文提出一种基于简化超体积的 NSGA-II 算法,在更新种群时使用简化的超体积替代拥挤距离衡量个体的收敛性和分布性。基于简化超体积的 NSGA-II 算法的具体步骤如下。

输入:

多目标优化问题

停止标准

N 为种群规模

输出: 种群 P

初始化: 随机产生初始种群 $P_0 = \{x^1, x^2, \dots, x^N\}$

$t=0$

对 P_t 进行选择交叉变异获得下一代 Q_t

While 未达到停止标准 do

$R_t = P_t \cup Q_t$

对 R_t 进行快速非支配排序得到非支配解集 $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$

$P_{t+1} = \emptyset$

$i=1$

Until $|P_{t+1}| + |F_i| \leq N$

$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i$

$i=i+1$

计算 F_i 中解的超体积

将 F_i 中的解根据超体积值降序排列

$P_{t+1} = P_{t+1} \cup F_i[1 : (N - |P_{t+1}|)]$

对 P_{t+1} 进行选择交叉变异获得下一代 Q_{t+1}

$t=t+1$

End while

$R_t = P_t \cup Q_t$

用同样的方法对 R_t 更新获得最终解集 P

3 数值实验 (Numerical experiment)

为了验证算法的性能,将改进的算法与较为先进的高维多目标进化算法 NSGA-III^[9]、MOEA/DD^[10]、KnEA^[11] 和 RVEA^[12] 进行比较,选取 CEC2018 高维多目标优化竞赛提出的 15 个多目标优化问题^[13] 作为测试函数,实验在基于 MATLAB 的多目标优化平台 PlatEMO^[14] 上进行测试。

实验选取逆世代距离 (Inverted Generational Distance, IGD)^[15] 指标衡量算法的性能,如公式(4)所示:

$$IGD(P, P^*) = \frac{\sum_{x^* \in P^*} d(x^*, P)}{|P^*|} \quad (4)$$

其中: P^* 为真实 Pareto 最优前沿面上均匀采样取得的解集; P 是通过算法进化得到的解集; $d(x^*, P)$ 表示解 x^* 与 P 中距离 x^* 最近的解之间的欧式距离; $|P^*|$ 是解集 P^* 的规模, IGD 越小,算法的收敛性和分布性越好。

将算法在具有 5 个目标函数的 15 个测试函数上进行测试,种群规模 $N=200$,迭代次数为 1 000,每个测试函数独立运行 20 次,IGD 平均值和标准差如表 1 所示,其中 IGD 最小的平均值加粗显示,括号中的数值是标准差,“+”“=”“−”则分别

表示改进的算法对比 NSGA-III、MOEA/DD、KnEA 和 RVEA 更好、一样、更差。

表 1 对本文算法、NSGA-III、MOEA/DD、KnEA、RVEA 进行测试得到的 IGD 度量值的平均值和标准差

Tab.1 The mean and standard deviation measurement values of IGD obtained from testing of the proposed algorithm, NSGA-III, MOEA/DD, KnEA and RVEA

测试函数	本文算法	NSGA-III	MOEA/DD	KnEA	RVEA
MaF1	1.3420E-1 (4.61E-3)	2.0830E-1 (1.00E-2)+	3.0206E-1 (1.07E-2)+	1.3136E-1 (1.91E-3)=	3.2908E-1 (6.21E-2)+
MaF2	1.0056E-1 (7.42E-3)	1.3012E-1 (2.56E-3)=	1.3665E-1 (3.72E-3)=	1.3734E-1 (3.62E-3)=	1.2736E-1 (1.42E-3)=
MaF3	5.8467E+3 (8.30E+3)	9.7048E-2 (1.52E-3)−	1.1693E-1 (1.75E-3)−	1.6971E-1 (9.55E-2)−	8.0906E-2 (6.70E-3)−
MaF4	2.2003E+0 (1.96E-1)	3.2220E+0 (5.56E-1)+	7.7080E+0 (2.14E-1)+	2.9005E+0 (2.52E-1)+	4.8145E+0 (1.30E+0)+
MaF5	1.8755E+0 (4.05E-2)	2.5843E+0 (1.15E-0)+	6.1823E+0 (1.00E+0)+	2.6408E+0 (8.04E-2)+	2.3218E+0 (3.07E-1)+
MaF6	5.6047E-3 (2.99E-3)	4.9054E-2 (9.12E-3)=	7.6075E-2 (4.42E-3)+	8.0721E-3 (2.28E-3)=	9.6534E-2 (3.42E-2)+
MaF7	8.5129E-1 (5.98E-1)	3.4413E-1 (1.20E-2)−	1.7891E+0 (8.07E-1)+	3.2757E-1 (8.09E-3)−	4.4844E-1 (1.10E-3)−
MaF8	1.2507E-1 (1.32E-2)	2.1547E-1 (2.19E-2)+	3.3063E-1 (3.61E-2)+	2.9874E-1 (8.77E-2)+	4.8799E-1 (8.73E-2)+
MaF9	2.0837E-1 (2.84E-1)	6.5706E-1 (1.32E-1)+	2.5294E-1 (1.34E-2)=	5.6348E-1 (1.82E-1)+	3.6742E-1 (7.00E-2)+
MaF10	1.0240E+0 (3.44E-2)	4.2888E-1 (3.81E-3)−	5.4591E-1 (3.64E-2)−	5.1174E-1 (7.85E-3)−	4.3054E-1 (4.90E-3)−
MaF11	1.2519E+0 (2.35E-1)	4.6337E-1 (1.69E-3)−	5.7805E-1 (9.69E-3)−	5.7122E-1 (2.10E-2)−	4.4446E-1 (8.16E-3)−
MaF12	1.0342E+0 (1.48E-2)	1.1183E+0 (4.00E-3)+	1.2858E+0 (1.43E-2)+	1.2609E+0 (1.70E-2)+	1.1224E+0 (2.51E-3)+
MaF13	1.5357E-1 (1.07E-1)	2.9677E-1 (5.22E-2)+	2.4087E-1 (2.54E-2)+	2.2221E-1 (2.01E-2)+	6.6957E-1 (1.36E-1)+
MaF14	1.6202E+1 (5.31E+1)	7.9085E-1 (3.74E-1)−	3.8193E-1 (8.93E-2)−	7.6615E-1 (2.77E-1)−	7.1001E-1 (2.02E-1)−
MaF15	1.6884E+0 (8.05E-2)	1.0511E+0 (4.49E-2)−	5.9102E-1 (4.35E-2)−	3.4169E+0 (1.84E+0)+	6.1117E-1 (4.50E-2)−
+/-/=		7/6/2	8/5/2	7/5/3	8/6/1

4 结果分析 (Result analysis)

在 15 个测试函数中,本文提出的基于简化超体积的 NSGA-III 算法在 8 个测试函数上比其他 4 个对比算法的 IGD 值更小,表现更优,证明了本文算法在求解大部分高维多目标优化问题时较好的表现。

在 MaF1~MaF15 的 15 个测试函数中, MaF1、MaF2、MaF4、MaF5、MaF7、MaF8、MaF9 和 MaF15 有局部 Pareto 最优前沿面,即这 8 个测试函数的 Pareto 最优前沿面投影不能全

部覆盖单位超平面,在这8个测试函数中,本文算法的平均IGD分别在5个函数上比NSGA-III、MOEA/DD、KnEA和RVEA的都要小。MaF3、MaF10、MaF11、MaF12、MaF13和MaF14这6个测试函数的Pareto最优前沿面投影能够完全覆盖单位超平面,本文算法分别在两个多目标优化问题上优于NSGA-III、MOEA/DD、KnEA和RVEA。对于Pareto最优前沿面有退化性的测试函数MaF6,本文算法优于NSGA-III、MOEA/DD、KnEA和RVEA。综上所述,基于简化超体积的NSGA-II算法在大多数多目标优化问题上都获得收敛性和分布性更优的解集,可以求解具有不同类型Pareto最优前沿面的高维多目标优化问题。

5 结论(Conclusion)

为了使NSGA-II算法在求解高维多目标问题时有更好的表现,本文提出一种基于简化超体积的NSGA-II算法,利用简化超体积在高维空间中可以更好地衡量个体收敛性和分布性的特点,代替NSGA-II算法原有的拥挤距离对个体进行比较,从而保留种群中性能更优的个体。实验结果表明,基于简化超体积的NSGA-II算法在求解高维多目标优化问题时表现较好,可以获得收敛性和分布更优的解集。

参考文献(References)

- [1] SCHAFFER J D. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms[C]//GREFENSTETTE J J. Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Applications. Hillsdale:Lawrence Erlbaum Associates,1985:93-100.
- [2] 刘建昌,李飞,王洪海,等. 进化高维多目标优化算法研究综述[J]. 控制与决策,2018,33(5):879-887.
- [3] 冯茜,李擎,全威,等. 多目标粒子群优化算法研究综述[J]. 工程科学学报,2021,43(6):745-753.
- [4] 吕文鹏,许峰. 基于自适应网格方法的免疫多目标进化算法[J]. 软件工程,2018,21(6):25-28.
- [5] SRINIVAS N,DEB K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms[J]. Evolutionary computation,1994,2(3):221-248.
- [6] DEB K,PRATAP A,AGARWAL S,et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II [J]. IEEE transactions on evolutionary computation, 2002, 6 (2): 182-197.
- [7] AUGER A,BADER J,BROCKHOFF D,et al. Theory of the hypervolume indicator: optimal μ -distributions and the choice of the reference point[C]//ACM. Proceedings of the Tenth ACM SIGEVO Workshop on Foundations of Genetic Algorithms. New York:ACM,2009:87-102.
- [8] JI H,DAI C. A simplified hypervolume-based evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. Complexity,2020,2020:1-7.
- [9] DEB K,JAIN H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I : solving problems with box constraints[J]. IEEE transactions on evolutionary computation,2014,18(4):577-601.
- [10] LI K,DEB K,ZHANG Q F,et al. An evolutionary many-objective optimization algorithm based on dominance and decomposition[J]. IEEE transactions on evolutionary computation,2015,19(5):694-716.
- [11] ZHANG X Y,TIAN Y,JIN Y C. A knee point-driven evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE transactions on evolutionary computation,2015,19(6):761-776.
- [12] CHENG R,JIN Y C,OLHOFFER M,et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization[J]. IEEE transactions on evolutionary computation,2016,20(5):773-791.
- [13] CHENG R,LI M,TIAN Y,et al. Benchmark functions for CEC'2017 competition on many objective optimization [R]. Birmingham:School of Computer Science,University of Birmingham Edgbaston,2017.
- [14] TIAN Y,CHENG R,ZHANG X Y,et al. PlatEMO: a MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization[J]. IEEE computational intelligence magazine, 2017,12(4):73-87.
- [15] ZITZLER E,THIELE L,LAUMANN M,et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: an analysis and review[J]. IEEE transactions on evolutionary computation,2003,7(2):117-132.

作者简介:

纪红(1994-),女,硕士,助教。研究领域:进化算法。
 赵建印(1976-),男,博士,副教授。研究领域:计算机仿真。
 陈健(1985-),男,博士,讲师。研究领域:计算机仿真。
 葛睿(1995-),男,硕士,助教。研究领域:进化算法。